Unidad VII: Aplicación de transformadas

Objetivo específico: Entender ampliamente el fenómeno del comportamiento de los modelos matemáticos para la resolución de problemas enfocados a los ejercicios en la transformada de Laplace.

Conceptos a desarrollar en la unidad: Dar al alumno las herramientas necesarias, para que pueda efectuar el análisis aplicados en las transformadas.

7.1 Aplicación de transformadas a sistemas continuas[1]

Funciones de Singularidad

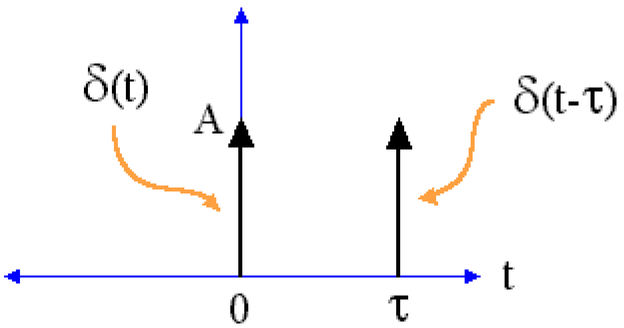
Las funciones de singularidad son un grupo de funciones que están relacionadas con la función impulso. Aparte de la función impulso están la función escalón y la función rampa unitaria.

Función Impulso

La función impulso es más un concepto matemático que una función, que se define de la siguiente manera:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0,\ t \neq 0 \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

- La función es cero para cualquier valor de t, excepto cero.
- Cuando la t es cero el valor de la función es infinito
- Por definición el área de esta función es igual a uno



7.1.2.-Gráfica función delta

La función impulso posee algunas propiedades que pueden resultar útiles.

$$\delta(t-\tau) = 0, t \neq \tau$$

También es importante para posteriores desarrollos la propiedad de desplazamiento o corrimiento.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)f(t)dt = f; \int_{\tau^-}^{\tau^+} \delta(t-\tau)f(t)dt = \int_{\tau^-}^{\tau^+} \delta(t-\tau)f(\tau)dt =$$

[1] Johnsonbaugh, Richard (2005). Matemáticas Discretas.

$$f(\tau)\int_{\tau^-}^{\tau^+}\delta(t-\tau)dt = f(\tau)\cdot 1 = f(\tau)$$

Físicamente existen efectos en la naturaleza a los que se puede asociar esta función como por ejemplo la fuerza aplicada en un lapso muy corto, como cuando un martillo golpea un clavo, o la presencia de un voltaje por un instante muy corto que en términos de esta función como:

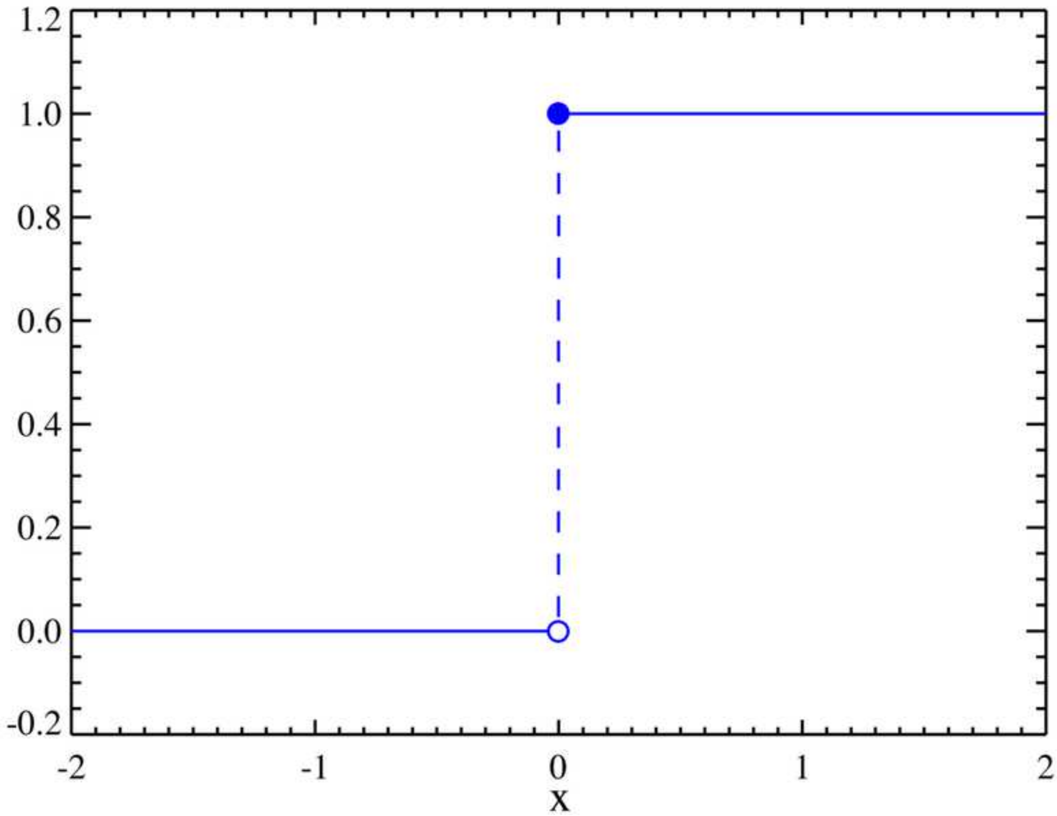
$$f(t) = 5delta(t)$$

Función Escalón Unitario

La función escalón unitario se define como la integral de la función impulso desde el infinito negativo hasta el tiempo t. La integral de la función impulso es 0 si el tiempo t es menor que 0, y 1 si el tiempo t es mayor que 0. Se define exactamente el escalón unitario como:

$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$$

El tipo de escalón unitario corresponde a una salida. El valor de la función en t=0, es indefinido. Otros textos lo pueden definir como 1 o 0. Así pues ésta nos representa la corriente continua disipada en nuestro dispositivo.



7.1.2.- Función Escalón Unitario o Heaviside

En el caso de la función escalón, físicamente representa un cambio instantáneo que se produce a t=0, es una suposición el hecho de representar una función con tiempos negativos (lo cual no existe), en cambio sirve para representar el caso de un interruptor que permanece abierto hasta que en un instante se cierra, estableciendo el máximo voltaje a una carga.

Función Rampa

La función rampa es la integral de la función escalón. Si consideramos que estamos sumando toda el área bajo la función escalón a hasta un tiempo t. Si t < 0 (cero), el valor de la integral será 0 (cero). Si es mayor que 0 (cero), entonces el valor será igual a la integral de 1 desde el tiempo 0 hasta el tiempo t, la cual también tiene el valor t, es decir:

$$\mathrm{r}(t) = \begin{cases} t, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Relación Impulso / Escalón

Tal como se puede fácilmente demostrar, la función escalón y la función impulso están relacionados de la siguiente manera:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

y

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

Relación escalón / rampa

Visto desde el punto de vista matemático una es la derivada de la otra puesto que; la función rampa se deriva de la función escalón, y ésta a su vez de la impulso. Análogamente igualmente se demuestra que

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau$$

y

$$u(t) = \frac{d}{dt} r(t)$$

Señales

Las señales son parte integrante de un todo. Las señales no tienen significado sin sistemas que las interpreten, y los sistemas son inútiles sin señales que procesar.

Las señales: ¿qué son?, ¿cuáles son? y ¿cuáles son sus propiedades? Estas propiedades se usan para describir características de las señales. También se cubren temas de transformaciones de señales, estas transformaciones son sólo matemáticas (conceptualmente se transforman la señal, no se diseñará un sistema para hacerlo). Por ejemplo la inversión en el dominio del tiempo es una transformación.

Una señal es cualquier fenómeno que puede ser representado de manera cuantitativa mediante una función continua (cuyo dominio es los números reales) o discreta (cuyo dominio es los números enteros). Como ejemplos de señales se tienen: La variación de la presión de aire a la salida de un parlante. La variación de la intensidad electromagnética que llega a una antena receptora. La variación de la temperatura máxima tomada diariamente. Los colores de una imagen digitalizada (pixeles).

Señales Continuas

Una señal continua es una señal "suave" que está definida para todos los puntos de un intervalo determinado del conjunto de los números reales. Por ejemplo, la función seno es un ejemplo continuo, como la función exponencial o la función constante. Una parte de la función seno en el rango de tiempos de 0 a 6 segundos también es contínua. Si deseamos ejemplos de la naturaleza tenemos la corriente, el voltaje, el sonido, la luz, etc.

Señales Discretas

Una señal discreta es una señal discontinua que está definida para todos los puntos de un intervalo determinado del conjunto de los números enteros. Su importancia en la tecnología es que, los computadores y microchips que son utilizados en este nuevo mundo "Digital" en el que vivimos, sólo manejan señales discretas. Una señal discreta en la naturaleza podría ser el pulso cardíaco, el rebotar de una pelota al caer libremente, etc.

Si para todos los valores de una variable existe un valor, estamos hablando de una señal continua.

Parte Par e Impar de una señal

Cualquier señal se puede poner como la suma de una señal par y una señal impar.

Par

Una función par es una función en donde $x(t) = x(-t)$. Es decir, esta función presenta una simetría en torno al eje y.

Impar

Una función impar es una función en donde $x(t) = -x(-t)$. Es decir, esta función presenta una simetría respecto al origen del sistema de coordenadas. (Espejo a través de la recta $y = -x$)

Periódica

Una función periódica es aquella que muestra una repetición constante, y no evoluciona con el tiempo Tcumpliéndose que $x(t+T) = x(t)$. Por ejemplo, una onda cuadrada o sinusoidal son ondas periódicas, en tanto que la función $x(t) = t$no es periódica.

Transformaciones de Señales Continuas Simples

Escala de la amplitud

Amplificación, Atenuación, Limitación, (falta definir cada una de éstas).

.Amplificación: Una amplificación de una señal es una manipulación de la misma. Esto se logra al multiplicar afuera del argumento por una constante mayor a 0 esto dará como resultado un amplificación en el caso contrario si multiplicas por una constante menor a 0 tendrás una atenuación de la señal.

Transformaciones Temporales

Compresión, Expansión y Escalamiento Temporales (falta definir cada una de éstas).

Inversión de Signo de la Señal

Una inversión de signo voltea la señal a lo largo del eje de amplitud. Así, "los últimos serán los primeros y los primeros serán los últimos." Las tres funciones básicas se modifican como sigue:

- La función impulso $\delta(t)$ queda igual
- La función escalón $u(t)$ se transforma en $u(-t)$
- La función rampa $r(t)$ se transforma en $r(-t)$

Causalidad, Anti-causalidad, No-causalidad

Esta propiedad de las señales esta relacionada con los valores que tomará una señal después de atravesar un sistema.

Causal
Una señal se denomina causal cuando no depende de sus valores en el futuro, y depende de sus valores presentes y/o pasados. Ejemplo: $y(t) = x(t-1) + x(t)$
En la naturaleza la mayoría de las señales son causales.

Anti-causal
Una señal se denomina anti-causal cuando no depende de sus valores en el pasado. Ej: $y(t) = 6x(t)$

No-causal
Una señal se denomina no-causal cuando sus valores dependen de una señal futura. Ej: $y(t) = x(-t)$

Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI)

Se dice que un sistema lineal es invariante en el tiempo si un desplazamiento en el tiempo de la entrada resulta en un desplazamiento idéntico de la salida sin que cambie la forma de onda o perfil de la señal. Esto se puede enunciar en la forma siguiente:

Un sistema lineal es invariante en el tiempo si para cualquier desplazamiento τ se verifica que

$$\delta(t+\tau) = h(t+\tau),$$

y como consecuencia, para cualquier señal $x(t)$ y desplazamiento τ,

$$x(t+\tau) = y(t+\tau).$$

Por consiguiente, en un Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (LIT), la respuesta impulsional dependerá únicamente de la diferencia $(t-\tau)$, es decir,

$$h(t,\tau) = h(t-\tau)$$

La respuesta de un LIT es entonces el producto de convolución de la excitación con la respuesta impulsional del sistema discreto.

"En el caso de las señales periódicas se pueden tratar como LIT siempre que el desplazamiento coincida con su periodo"

Convolución

Se define como la integral del producto de dos señales después de ser desplazada una distancia τ.

$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ los limites de la integral dependen de la posición de las distintas señales respecto al tiempo. En los siguientes casos a la resolución que se llega es que cuando las señales nos dan algún valor positivo no se avanzarán o las señales se quedaran truncas y no procede este problema.

y(t) es la salida.

x(t) es una señal de entrada.

h(t) es otra señal de entrada.

Convolución de Señales en Sistemas Continuos LTI

Se define a la integral de convolución $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$ Y la respuesta de un sistema lineal estacionario a una entrada arbitraria se obtiene como la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso.

Si el sistema es no-causal

$y(t) = \int_{-\infty}^{0-} u(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{0}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$ donde la primera intregral depende de valores futuros y la segunda de valores pasados y presentes.

Si el sistema es casual

La convolución queda definida como $y(t) = \int_{0}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$ de valores pasados y presentes.

Ejemplos:

Convolución de una rampa con un pulso (señal de impulso o escalón)

$$y(t) = r(t) * u(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Luego como la rampa r(t)=t*u(t) reemplazamos en la integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

y como $U(\tau)$ vale 0 en los valores negativos ya tenemos uno de los límites de integración y si aparte consideramos que a $u(t-\tau)$ lo despejamos y lo corremos t veces el otro límite de integracion queda definido por el valor t. quedando la fórmula de esta manera

$y(t) = \int_0^t \tau d\tau$ la cual es muy fácil de integrar obteniendo así

$$y(t) = \frac{(t^2)}{2}$$

Series y Transformadas de Fourier

Series de Fourier

Muchas aplicaciones de ingeniería involucran el procesamiento de señales aleatorias. Algunos ejemplos de estas aplicaciones son: predicción, donde obtenemos futuros valores de una señal usando valores pasados de la misma; filtrado, donde buscamos recuperar los valores de una señal que ha sido alterada por ruido; modulación, donde convertimos señales de información de bajas frecuencias en señales de transmisión de alta frecuencia que se transmiten más fácilmente en el medio de transmisión. En todos estos casos, el procesamiento de las señales involucra convertir una señal en otra. Es decir que se efectúa una transformación o mapeo de una función del tiempo (la señal de entrada) en otra función del tiempo (la señal de salida). Esta transformación está representada por un sistema dinámico. En estas notas estamos interesados en describir las propiedades estadísticas de la señal de salida cuando el sistema es lineal e invariante en el tiempo, y la señal de entrada es estacionaria en sentido amplio. Somero repaso de Señales y Sistemas Un sistema dinámico es una transformación entre el espacio de señales de entrada y el espacio de señales de salida. Pendiente por que no aparece la explicación de espacio dinámico

Soluciones de Fourier en el Dominio de la Frecuencia

Ejemplos

Las derivadas de las señales sinousidales dependen del número de frecuencia de forma analógica según la señal si es discreta y continua, que básicamente una señal discreta también cuenta con una señal continua.

Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una transformación matemática. Nos ayuda a resolver sistemas complejos mediante la transformación de dichos sistemas en ecuaciones algebraicas sencillas. Por ejemplo, en vez de usar ecuaciones diferenciales, mediante la transformada de Laplace, convertimos dichas ecuaciones en polinomios, que son de menor dificultad resolutiva.

7.2 Aplicación de transformadas a sistemas discretos[2]

La transformada Z, al igual que otras transformaciones integrales, puede ser definida como una transformada unilateral o bilateral.

Transformada Z bilateral

La TZ bilateral de una señal definida en el dominio del tiempo discreto x[n] es una función X(z) que se define

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Donde n es un entero y z es, en general, un número complejo de la forma

$$z = Ae^{j\omega}$$

Donde A es el módulo de z, y ω es la frecuencia angular en radianes por segundo (Rad./s).

Transformada Z unilateral

De forma alternativa, en los casos en que x[n] está definida únicamente para n ≥ 0, la transformada Z unilateral se define como

$$X^{+}(z) = Z^{+}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

En el procesamiento de señales, se usa esta definición cuando la señal es causal. En este caso, la Transformada Z resulta una serie de Laurent, con ROC del tipo $|z| > R$; es decir que converge "hacia afuera".

Un ejemplo interesante de la TZ unilateral es la función de generación de probabilidades, donde x[n] es la probabilidad que toma una variable discreta aleatoria en el instante n, y la función X(z) suele escribirse como X(s), ya que s = z−1. Las propiedades de las transformadas Z son útiles en la teoría de la probabilidad.

Transformada Z inversa

La Transformada Z inversa se define

$$x[n] = Z^{-1}\{(X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

Donde Ces un círculo cerrado que envuelve el origen y la región de convergencia (ROC). El contorno, C, debe contener todos los polos de $X(z)$.

Un caso especial y simple de esta integral circular es que cuando Ces el círculo unidad (que también puede usarse cuando la ROC incluye el círculo unidad), obtenemos la transformada inversa de tiempo discreto de Fourier:

---

[2] Johnsonbaugh, Richard (2005). Matemáticas Discretas.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

La TZ con un rango finito de n y un número finito de z separadas de forma uniforme puede ser procesada de forma eficiente con el algoritmo de Bluestein. La transformada discreta de Fourier (DFT) es un caso especial de la TZ, y se obtiene limitando z para que coincida con el círculo unidad.

Región de convergencia (ROC)

La región de convergencia, también conocida como ROC, define la región donde la transformada-z existe. La ROC es una región del plano complejo donde la TZ de una señal tiene una suma finita. La ROC para una x[n] es definida como el rango de z para la cual la transformada-z converge. Ya que la transformada–z es una serie de potencia, converge cuando $x[n]z^{-n}$es absolutamente sumable.

$$ROC = \{z : \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} < \infty\}$$

Propiedades de la Región de Convergencia:

La región de convergencia tiene propiedades que dependen de las características de la señal, x[n].

- La ROC no tiene que contener algún polo. Por definición un polo es donde x[z] es infinito. Ya que x[z] tiene que ser finita para toda la z para tener convergencia, no puede existir ningún polo para ROC.

- Si x[n] es una secuencia de duración finita, entonces la ROC es todo el plano-z, excepto en |z|=0 o |z|=∞.

- Si x[n] es una secuencia del lado derecho entonces la ROC se extiende hacia fuera en el último polo desde x[z].

- Si x[n] es una secuencia del lado izquierdo, entonces la ROC se extiende hacia dentro desde el polo más cercano en x[z].

- Si x[n] es una secuencia con dos lados, la ROC va ser un anillo en el plano-z que está restringida en su interior y exterior por un polo.

Ejemplo 1 (Sin ROC)

Sea $x[n] = 0.5^n$. Expandiendo $x[n]$en $(-\infty, \infty)$obtenemos

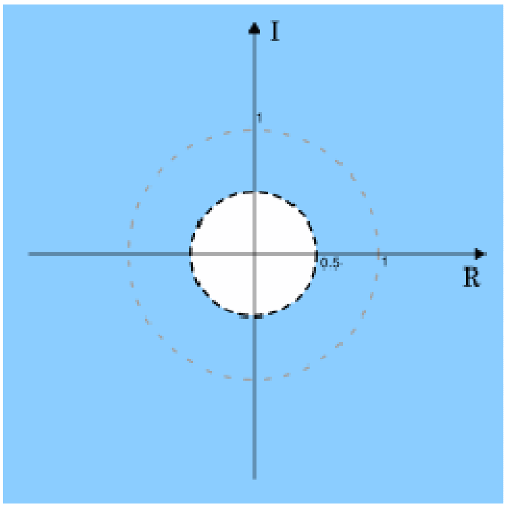
$$x[n] = \{..., 0.5^{-3}, 0.5^{-2}, 0.5^{-1}, 1, 0.5, 0.5^2, 0.5^3, ...\} = \{..., 2^3, 2^2, 2, 1, 0.5, 0.5^2, 0.5^3, ...\}$$

Siendo la suma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} < \infty$$

No hay ningún valor de $z$que satisfaga esta condición.

Ejemplo 2 (ROC causal)



Gráfica 7.2.1.-ROC muestra en azul, el círculo es un punto gris y el círculo $|z| = 0.5$ muestra del círculo.

Sea $x[n] = 0.5^n u[n]$ (donde u es la función escalón). Expandiendo $x[n]$ en $(-\infty, \infty)$ obtenemos

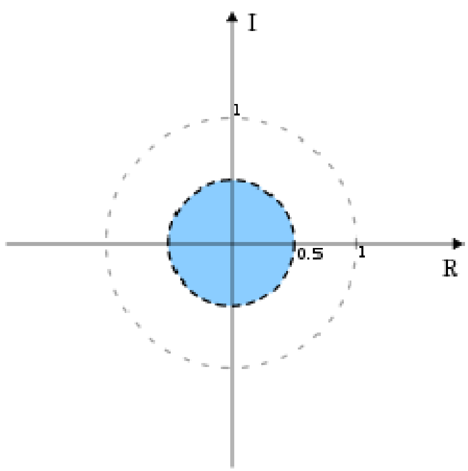
$$x[n] = \{..., 0, 0, 0, 1, 0.5, 0.5^2, 0.5^3, ...\}$$

Siendo la suma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{0.5}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

La última igualdad se obtiene con la fórmula del sumatorio para series geométricas, y la igualdad sólo se conserva si $\left|0.5z^{-1}\right| < 1$, lo cual puede ser reescrito para definir z de modo $|z| > 0.5$. Por lo tanto, la ROC es $|z| > 0.5$. En este caso la ROC es el plano complejo exterior al círculo de radio 0,5 con origen en el centro.

Ejemplo 3 (ROC anticausal)



Gráfica 7.2.2.-ROC muestra en azul, el círculo unitario como un punto gris circular i el circulo exterior $|z| = 0.5$ muestra del círculo.

Sea $x[n] = -(0.5)^n u[-n-1]$(donde $u$es la función escalón). Expandiendo $x[n]$entre $(-\infty, \infty)$obtenemos

$$x[n] = \{..., -(0.5)^{-3}, -(0.5)^{-2}, -(0.5)^{-1}, 0, 0, 0, ...\}$$

Siendo la suma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} 0.5^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{z}{0.5}\right)^{-n}$$
$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{z}{0.5}\right)^{m} = -\frac{0.5^{-1}z}{1-0.5^{-1}z} = \frac{z}{z-0.5} = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

De nuevo, usando la fórmula de sumatorio para series geométricas, la iguadad sólo se mantiene si $\left|0.5^{-1}z\right| < 1$, de modo que podemos definir $z$como $|z| < 0.5$. Aquí, la ROC es $|z| < 0.5$, es decir, el interior de un círculo centrado en el origen de radio 0,5.

Conclusión de los ejemplos

Los ejemplos 2 y 3 muestran claramente que la transformada $X(z)$de $x[n]$es única si y sólo si se especifica cuál es la ROC. Dibujando los gráficos de polos y ceros para los casos causal y anticausal, comprobaríamos como la ROC de ambos casos no incluye el polo que está en 0,5. Esto se extiende a los casos con múltiples polos: la ROC nunca contiene polos.

En el ejemplo 2, el sistema causal tiene una ROC que incluye $|z| = \infty$, mientras que al sistema anticausal del ejemplo 3 le pertenece una ROC que incluye $|z| = 0$.

En los sistemas con múltiples polos, es posible tener una ROC que no incluya ni $|z| = \infty$ni $|z| = 0$. La ROC crea una región circular. Por ejemplo, $x[n] = 0.5^n u[n] - 0.75^n u[-n-1]$ tiene dos polos en 0,5 y 0,75. La ROC será $0.5 < |z| < 0.75$, la cual no incluye ni el origen ni el infinito. Este tipo de sistemas se conoce como sistemas de causalidades mezcladas, ya que contiene un término causal $0.5^n u[n]$y otro anticausal $-(0.75)^n u[-n-1]$.

La estabilidad de un sistema se puede determinar simplemente conociendo su ROC. Si esta ROC contiene el círculo unidad (p. ej. $|z| = 1$) entonces el sistema es estable. En los sistemas anteriores, el sistema causal es estable porque $|z| > 0.5$contiene el círculo unidad.

Si tenemos la TZ de un sistema sin su ROC (p.ej., un $x[n]$ambiguo) podemos determinar una única señal $x[n]$en función de que queramos o no las siguientes propiedades:

- Estabilidad
- Causalidad

Si queremos un sistema estable, la ROC debe contener el círculo unidad. Si queremos un sistema causal, la ROC debe contener al infinito. Si queremos un sistema anticausal, la ROC debe contener al origen.

De este modo, podemos encontrar una señal en el tiempo $x[n]$que sea única.

Teorema de valor inicial If x[n] causal

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z).$$

Teorema de valor final Si los polos de $(z-1)X(z)$están dentro del circulo unitario, entonces

$$x[\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z).$$

Tabla con los pares más habituales de la transformada Z

	Señal, $x(n)$	**Transformada Z,** $X(z)$	**ROC**
1	$\delta(n)$	1	$\text{todo } z$
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
6	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
7	$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
8	$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
9	$a^n\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
10	$a^n\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

Relación con Laplace

La TZ bilateral es simplemente la transformada de Laplace bilateral de la señal muestreada

$$x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)$$

donde $x(t)$es la señal continua muestreada, $x[n] = x(nT)$la n-ésima muestra, Tel período de muestreo, y con la sustitución $z = e^{sT}$.

Del mismo modo, la TZ unliateral es simplemente la transformada de Laplace unilateral de la señal ideal muestreada. En ambas se asume que la señal muestreada vale cero para todos los índices negativos en el tiempo.

Relación con Fourier

La TZ es una generalización de la transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT). La DTFT puede hallarse evaluando la TZ $X(z)$en $z = e^{j\omega}$o, lo que es lo mismo, evaluada en el círculo unidad. Para determinar la respuesta en frecuencia del sistema, la TZ debe ser evaluada en el círculo unidad.

Ecuación diferencial de coeficientes lineales constantes

La ecuación diferencial de coeficientes lineales constantes (LCCD) es una representación de un sistema lineal basada en la ecuación de la media autorregresiva.

$$\sum_{p=0}^{N} y[n-p]\alpha_p = \sum_{q=0}^{M} x[n-q]\beta_q$$

Ambos términos de esta ecuación pueden dividirse por α_0, si no es cero, normalizando $\alpha_0 = 1$la ecuación LCCD puede ser escrita

$$y[n] = \sum_{q=0}^{M} x[n-q]\beta_q - \sum_{p=1}^{N} y[n-p]\alpha_p$$

Esta forma de la ecuación LCCD es más explícita para comprobar que la salida actual $y[n]$se define en función de las salidas anteriores $y[n-p]$, la entrada actual $x[n]$, y las entradas anteriores $x[n-q]$.

Función de transferencia

Se calcula haciendo la TZ de la ecuación

$$Y(z)\sum_{p=0}^{N} z^{-p}\alpha_p = X(z)\sum_{q=0}^{M} z^{-q}\beta_q$$

y dividiendo

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{q=0}^{M} z^{-q}\beta_q}{\sum_{p=0}^{N} z^{-p}\alpha_p} = \frac{\beta_0 + z^{-1}\beta_1 + z^{-2}\beta_2 + \ldots + z^{-M}\beta_M}{\alpha_0 + z^{-1}\alpha_1 + z^{-2}\alpha_2 + \ldots + z^{-N}\alpha_N}$$

Ceros y polos

Gracias al teorema fundamental del álgebra sabemos que el numerador tiene M raíces (llamadas ceros) y el denominador tiene N raíces (llamadas polos). Factorizando la función de transferencia

$$H(z) = \frac{(1 - q_1 z^{-1})(1 - q_2 z^{-1})...(1 - q_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})...(1 - p_N z^{-1})}$$

Donde q_k es el k-ésimo cero y p_k es el k-ésimo polo. Los ceros y polos son por lo general complejos, y por tanto se pueden dibujar en el plano complejo.

En definitiva, los ceros son las soluciones de la ecuación obtenida de igualar el numerador a cero, mientras que los polos son las de la ecuación que se obtiene al igualar a cero el denominador.

Se puede factorizar el denominador mediante la descomposición en fracciones simples, las cuales pueden ser transformadas de nuevo al dominio del tiempo. Haciendo esto obtenemos la respuesta al impulso y la ecuación diferencial de coeficientes lineales constantes del sistema.